

8.3 エラトステネスのふるい

エラトステネスのふるい (sieve of Eratosthenes) は、素数を列挙する高速なアルゴリズムとしてよく知られています。例として、エラトステネスのふるいを使って、1 から 30 までに含まれる素数列を求めてみましょう⁵。まず、1 から 30 までの数を列挙します (1 は素数ではないので、最初から消しておく)。

~~1~~, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

次に、消されていない数で 1 の次に大きな数 2 の倍数を全て消します。

~~1~~, **2**, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~,
11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~,
21, ~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, 27, ~~28~~, 29, ~~30~~

更に、消されていない数で 2 の次に大きな数 3 の倍数を全て消します。

~~1~~, 2, **3**, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~,
11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~,
~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~

同様に、この操作を繰り返すことで、1 から 30 までに含まれる素数列を求めることができます (×の付いていない数が素数)。

~~1~~, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~,
11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~,
~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~

↓

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}

なお、30 以下の素数列を求めるのであれば、 $\lceil \sqrt{30} \rceil = \lceil 5.47 \dots \rceil = 5$ 以下の素数の倍数を消せば十分です (例えば、 $30 = 5 \times 6$ であるから、 $5 + 1$ で割る以前に 5 で割れてしまうため)。

* $\lceil x \rceil$ は x を超えない最大の整数を表す (ガウス記号)。

問題 1 エラトステネスのふるいを使って N までの素数列を求めるプログラムを作成しなさい。

問題 2 問題 1 のプログラムを足し算のみを使ったプログラムに書き換えなさい。

問題 3 N までの全ての数を列挙すると 2 の倍数が配列の半分を占めメモリの無駄が多い。最初から 2 の倍数を除いた形で、エラトステネスのふるいを使って N までの素数列を求めるプログラムを作成しなさい。

⁵全ての数を列挙すると、2 の倍数がその半分を占めるためメモリの無駄が多くなります。これを改善するため、最初から 2 の倍数を除いて $2n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) を対象にエラトステネスのふるいを実行するとよい。更に効率よくするには、2 の倍数と 3 の倍数を除いて $6n \pm 1$ ($n = 1, 2, \dots$) を対象にするとよい。

8.4 グレゴリオ暦

現在私達は、**グレゴリオ暦**と呼ばれる暦 (太陽暦) を利用しています。基本的に 1 年は 365 日ですが、地球の公転周期は 365.2422 日であるため、1 年を 365 日にしてしまうとズレが生じてしまいます。そのため、グレゴリオ暦では、以下の (1)~(3) の条件にしたがい、閏年 (2 月を 28 日から 1 日多い 29 日にする) を設けることでズレを修正しています。

条件：

- (1) ローマのグレゴリオ 13 世によって西暦 1582 年 10 月 15 日金曜日から実施された。
- (2) 西暦の年数が 4 で割り切れ、かつ 100 で割り切れない年は閏年。
- (3) (2) の例外として、西暦の年数が 400 で割り切れる年は閏年。

グレゴリオ暦が使用される前は、1 年を 365.25 日で換算したユリウス暦 (閏年は 4 年に 1 度) が利用されていました (グレゴリオ暦はユリウス暦を精巧にしたもの)。また、西暦 1582 年 10 月 4 日 (ユリウス暦) の翌日より西暦 1582 年 10 月 15 日 (グレゴリオ暦) に切り替わっており、それ以前の時間に遡及してグレゴリオ暦を適用することはありません。日本では、西暦 1873 年 1 月 1 日に当たる明治 5 年 12 月 3 日 (太陰太陽暦) を明治 6 年 1 月 1 日 (グレゴリオ暦) とし、世界標準であるグレゴリオ暦に切り替わりました。

問題 1 年と月を入力したとき、その年月のカレンダーを表示するプログラムを作成しなさい。