

9.6 ヒープソート

ヒープソートは、図 9.3 のような **2 分木** (binary tree) というデータ構造を用い、**ヒープ化** (**ヒープ** (heap) については下記参照) と **ダウンヒープ** (down heap) という 2 つの段階を踏んでソートを行います。なお、2 分木は「○」で表された**節点** (node) と「—」で表された**枝** (branch) で構成されます。特に、節点の最上位を**根** (root)、子を持たない節点を**葉** (leaf) と呼び、根からある段までの節点を**深さ**と呼びます。また、図 9.4 のように分岐元となる節点を**親** (parent)、分岐先の節点を**子** (child) と呼び、親の要素を a_i とすると 2 つの子の要素は a_{2i} と a_{2i+1} となる親子関係を持っています。

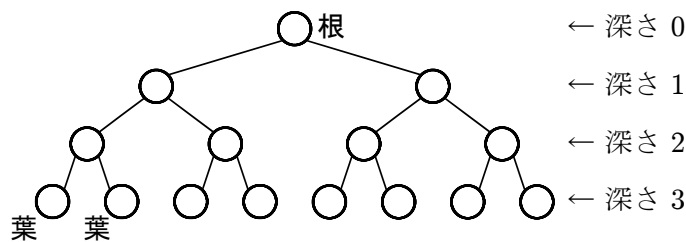


図 9.3: 2 分木

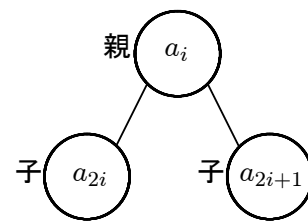


図 9.4: 2 分木の構造

従って、データ列 {4, 10, 5, 2, 1, 7, 8, 6, 3, 9} を 2 分木に対応させると図 9.5 のようになります。

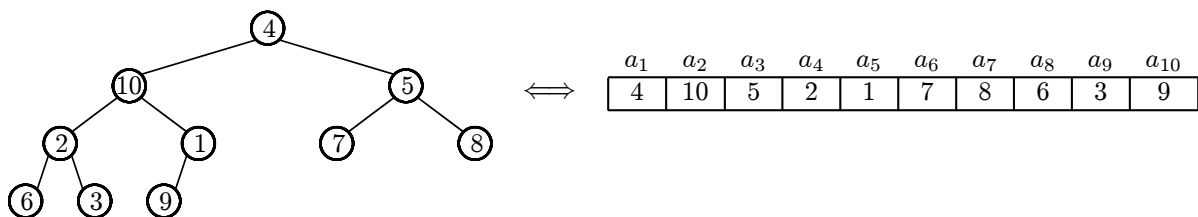


図 9.5: 2 分木と配列の対応

ヒープとダウンヒープは、基本的には同じ作業ですが、ヒープを適用する範囲が異なります。

ヒープ 「ある節点 a_i (親) をヒープする」とは、親 a_i と子 a_{2i} , a_{2i+1} の関係が「 $a_i > a_{2i}$ 」かつ「 $a_i > a_{2i+1}$ 」を満たすように親と子を入れ替え、この操作を下位に向かって (子, 孫, ひ孫, ...) 順に繰り返し行なうことです。なお、全ての親の節点で前記の親子関係が成り立つようにヒープを繰り返し適用することを**ヒープ化**と呼びます。

* 親を決定するために 2 回の比較が必要となります。

ダウンヒープ a_1 と a_i を入れ替え ($a_1 \leftarrow a_i$ かつ $a_i \leftarrow a_1$)、節点 a_1 から a_{i-1} を対象に節点 a_1 をヒープします (節点 a_i から a_n まではソート済みとなるため、節点 a_1 から a_{i-1} からなる 2 分木としてヒープを行ないます)。これにより、節点 a_i から a_n までのソートが完了します。

* 次の Step では節点 a_1 から a_{i-1} を対象に、ダウンヒープを行ないます。

以上より、ヒープソートのアルゴリズムは、

ヒープ化：

- Step 1** 節点 $a_{[n/2]}$ をヒープする。
 * 最大で $2 \cdot m$ 回の比較が必要となる (*1) (本当は 2×1 回)。
- Step 2** 節点 $a_{[n/2]-1}$ をヒープする。
 * 最大で $2 \cdot m$ 回の比較が必要となる (*1)。
- $\vdots$
- Step $[n/2]$** 節点 a_1 をヒープする。
 * 最大で $2 \cdot m$ 回の比較が必要となる (*1)。

ダウンヒープ：

- Step 1** 節点 a_n と a_1 を交換し、節点 a_1 と a_{n-1} を対象に節点 a_1 をヒープする。
 * 最大で $2 \cdot m$ 回の比較が必要となる (*1)。
- Step 2** 節点 a_{n-1} と a_1 を交換し、節点 a_1 と a_{n-2} を対象に節点 a_1 をヒープする。
 * 最大で $2 \cdot m$ 回の比較が必要となる (*1)。
- $\vdots$
- Step $n-1$** 節点 a_2 と a_1 を交換する。最後は節点 a_1 をヒープする必要がない。
 なぜなら、ヒープの対象となる子が存在しないからである。
 * 最大で $2 \cdot m$ 回の比較が必要となる (*1)。

(*1) 計算が複雑になるので大きめに見積もります (計算量のオーダー表記の性質より)。

注意：節点 $a_{[n/2]}$ は子を持つ最後の親です ($[n/2]$ 以降の節点は子を持たない)。

注意：2分木の深さを m (正整数) とします ($m = \lceil (\log 2)^{-1} \cdot \log n - 1 \rceil + 1 = \lceil (\log 2)^{-1} \cdot \log n \rceil$)。

$$\because n \doteq 1 + 2 + \dots + 2^m = \frac{1 - 2^{m+1}}{1 - 2} = 2^{m+1} - 1 \doteq 2^{m+1} \implies m \doteq (\log 2)^{-1} \cdot \log n - 1$$

* $[x]$ は x を超えない最大整数を表す (ガウス記号)。

となります。従って、データ列 $\{4, 10, 5, 2, 1, 7, 8, 6, 3, 9\}$ をヒープソートすると図 9.6 の初期状態からヒープ化 (図 9.7~図 9.11)、及び、ダウンヒープ (図 9.12~図 9.17) の過程を経てソーティングが完了します (下記の「ヒープソートによるソーティングプログラム」でソーティングした場合)。

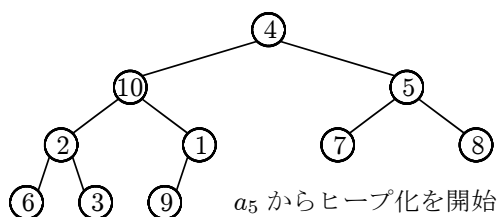


図 9.6: 初期状態

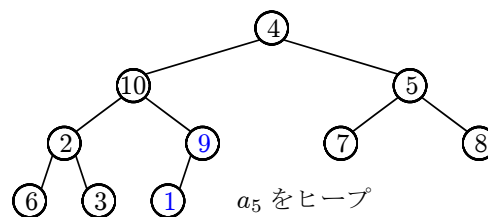


図 9.7: ヒープ化 (Step 1)

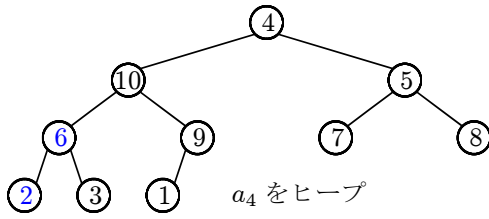


図 9.8: ヒープ化 (Step 2)

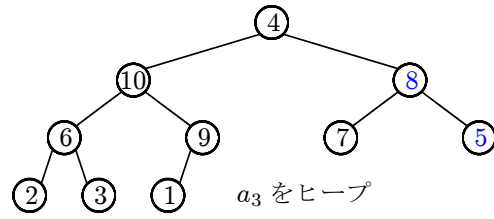


図 9.9: ヒープ化 (Step 3)

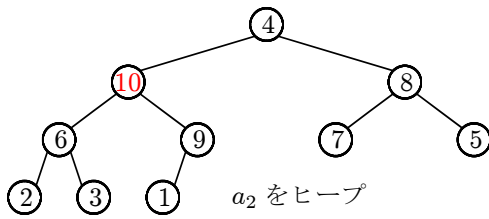


図 9.10: ヒープ化 (Step 4)

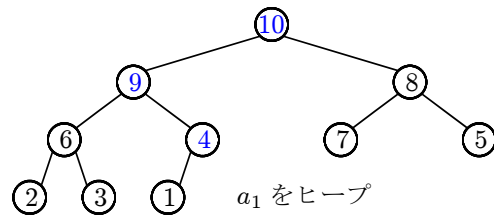


図 9.11: ヒープ化 (Step 5)

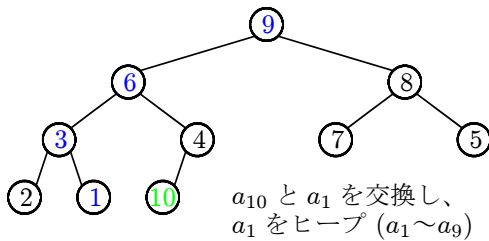


図 9.12: ダウンヒープ (Step 1)

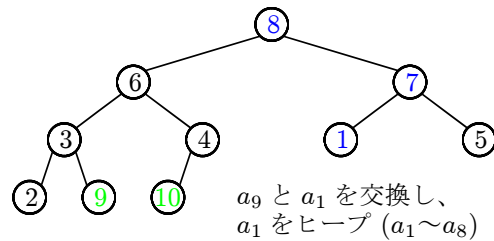


図 9.13: ダウンヒープ (Step 2)

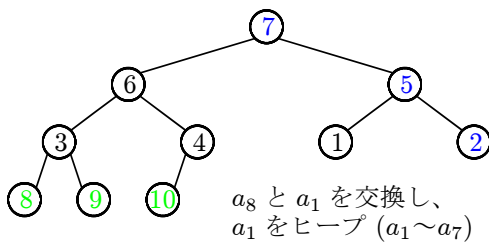


図 9.14: ダウンヒープ (Step 3)

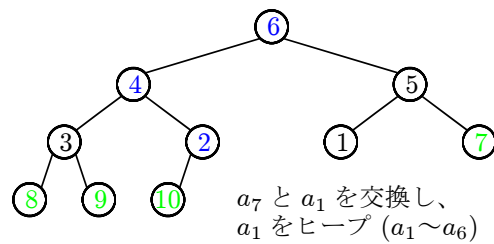


図 9.15: ダウンヒープ (Step 4)

... 中略 ...

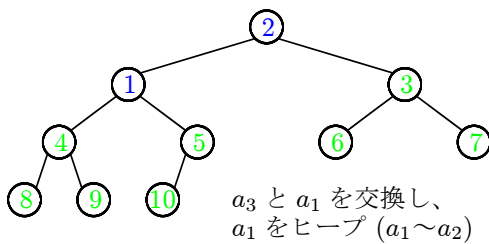


図 9.16: ダウンヒープ (Step 8)

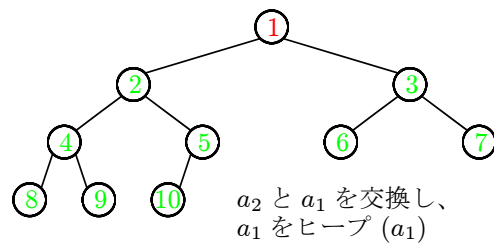


図 9.17: ダウンヒープ (Step 9)

● ヒープソートによるソーティングプログラム

heapsort.c

```
1: #include <stdio.h>
2:
3: #define N 10
4:
5: void heapsort(int a[]);
6: void printarray(int a[]);
7:
8: int main(void)
9: {
10:     int a[N + 1] = {0, 4, 10, 5, 2, 1, 7, 8, 6, 3, 9};
11:
12:     heapsort(a);
13:
14:     return 0;
15: }
16:
17: void heapsort(int a[])
18: {
19:     int i, j, k, n = N, x;
20:
21:     for (k = n / 2; k >= 1; k--) {
22:         i = k;
23:         x = a[i];
24:         j = 2 * i;
25:         while (j <= n) {
26:             if (j < n && a[j] < a[j + 1]) j++;
27:             if (x >= a[j]) break;
28:             a[i] = a[j];
29:             i = j;
30:             j = 2 * i;
31:         }
32:         a[i] = x;
33:         printarray(a);
34:     }
35:     printf("%n");
36:
```

```

37:     while (n > 1) {
38:         x = a[n];
39:         a[n] = a[1];
40:         n--;
41:         i = 1;
42:         j = 2 * i;
43:         while (j <= n) {
44:             if (j < n && a[j] < a[j + 1]) j++;
45:             if (x >= a[j]) break;
46:             a[i] = a[j];
47:             i = j;
48:             j = 2 * i;
49:         }
50:         a[i] = x;
51:         printarray(a);
52:     }
53: }
54:
55: void printarray(int a[])
56: {
57:     int i;
58:
59:     for (i = 1; i <= N; i++) printf("%3d ", a[i]);
60:     printf("\n");
61: }

```

なお、ヒープソートでは、ヒープ化の各 Step で最大 $2 \cdot m (= 2(\log 2)^{-1} \log n)$ 回、ダウンヒープの各 Step で最大 $2 \cdot m (= 2(\log 2)^{-1} \log n)$ 回の比較が必要となるので、計算量は

$$\left(\frac{n}{2}\right) \cdot (2(\log 2)^{-1} \log n) + (n - 1) \cdot (2(\log 2)^{-1} \log n) = 3(\log 2)^{-1} n \log n - 2(\log 2)^{-1} \log n$$

となります。更に、オーダ記法で表すと $O(n \log n)$ となります。

ヒープソートの計算量のオーダはクイックソートと同じですが、平均的な計算速度はクイックソートに劣ります (ヒープ化に際して要素の入れ替えが頻繁に起こるため)。逆に、クイックソートに比べデータ列の良し悪しに左右されず安定したソーティングを行えるという長所を持ちます。

問題 1 「ヒープソートによるソーティングプログラム (heapsort.c)」を検証しなさい。

9.7 マージソート

マージソートは、2つの整列済みデータ列を1つのデータ列に結合することでソーティングを行います。冒頭にも述べたとおりマージソートは外部整列なのですが、一度データ列の要素が1個になるまで分割し、それら要素の結合を繰り返すことで内部整列としてソーティングすることができます。アルゴリズムは、

- Step 0** $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を要素が1個になるまで2分割する ($\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$)。
- Step 1** 2つの整列済みデータ列 $\{a_i\}, \{a_j\}$ の要素を比較し、1つの整列済みデータ列 $\{a'_i, a'_j\}$ に結合する ($n/2$ 個の整列済みデータ列ができる)。
* (最大で) $1 \cdot n/2$ 回の比較が必要となる。
- Step 2** 2つの整列済みデータ列 $\{a'_i, a'_j\}, \{a'_k, a'_l\}$ の要素を比較し、1つの整列済みデータ列 $\{a''_i, a''_j, a''_k, a''_l\}$ に結合する ($n/4$ 個の整列済みデータ列ができる)。
* 最大で $2^2 \cdot n/4$ 回の比較が必要となる。
- ⋮ ⋮
- Step m** 2つの整列済みデータ列の各要素を比較し、1つの整列済みデータ列に結合する。
* 最大で $2^{2m} \cdot 1$ 回の比較が必要となる。

注意： Step 数 m は、クイックソートと同様に、再帰的方法による深さを表す (図 9.2 参照)。

となります。従って、データ列 $\{4, 10, 5, 2, 1, 7, 8, 6, 3, 9\}$ をマージソートによってソーティングすると表 9.7 のようになります。

START	$\{4, 10, 5, 2, 1, 7, 8, 6, 3, 9\}$
Step 0	$\{\{4, 10, 5, 2, 1\}, \{7, 8, 6, 3, 9\}\}$ 2分割を繰り返す。 $\{\{\{4, 10, 5\}, \{2, 1\}\}, \{\{7, 8, 6\}, \{3, 9\}\}\}$ $\{\{\{\{4, 10\}, \{5\}\}, \{\{2\}, \{1\}\}\}, \{\{\{7, 8\}, \{6\}\}, \{\{3\}, \{9\}\}\}\}$ $\{\{\{\{\{4\}, \{10\}\}, \{5\}\}, \{\{2\}, \{1\}\}\}, \{\{\{\{7\}, \{8\}\}, \{6\}\}, \{\{3\}, \{9\}\}\}\}\}$
Step 1	$\{\{\{\{4, 10\}, \{5\}\}, \{\{2\}, \{1\}\}\}, \{\{\{7, 8\}, \{6\}\}, \{\{3\}, \{9\}\}\}\}$
Step 2	$\{\{\{4, 5, 10\}, \{1, 2\}\}, \{\{6, 7, 8\}, \{3, 9\}\}\}$
Step 3	$\{\{1, 2, 4, 5, 10\}, \{3, 6, 7, 8, 9\}\}$
END	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

表 9.7: マージソートによるソーティングの例

なお、マージソートでは、Step 1 で1回の比較が $n/2$ 回、Step 2 で最大4回の比較が $n/4$ 回、 $\dots$ 、Step m で最大 2^{2m} 回の比較が $n/2^{2m}$ 回が必要となります。ただし、ステップ数 m は、表 9.7 のように再帰的に2分割する (2分木を構成する) ことにすれば、 $n = 2^m \iff m = \log n \cdot (\log 2)^{-1}$

が成り立ちます。従って、計算量は

$$\begin{aligned}
 \left(1 \cdot \frac{n}{2}\right) + \left(4 \cdot \frac{n}{4}\right) + \cdots + \left(2^{2m} \cdot \frac{n}{2^{2m}}\right) &= \frac{n}{2} + n + \cdots + n \\
 &= \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} + n + \cdots + n \\
 &= -\frac{n}{2} + n \cdot m \\
 &= -\frac{n}{2} + (\log 2)^{-1} n \log n
 \end{aligned}$$

となります。更に、オーダ記法で表すと $O(n \log n)$ となります。

マージソートの計算量のオーダはクイックソートと同じですが、平均的な計算速度はクイックソートに劣ります (2つの整列済みデータ列を1つのデータ列にコピーする必要があるため⁶)。逆に、ヒープソートと同様、クイックソートに比べデータ列の良し悪しに左右されず安定したソーティングを行えるという長所を持ちます。

問題 1 「マージソートによるソーティングプログラム」を作成しなさい。

最後に、これまで紹介したソーティングアルゴリズムの計算量のオーダ表記について、表 9.8 にまとめておきます (重要なのは平均的な場合)。

	最良の場合	最悪の場合	平均的な場合
選択ソート	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
バブルソート	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
挿入ソート	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
クイックソート	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$
ヒープソート	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
マージソート	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$

表 9.8: ソーティングアルゴリズムの計算量の比較

⁶最低でも元の配列と同じ記憶容量 (メモリ) が必要となります。言い換えれば、他のソーティングプログラムに比べ、マージソートでは多くの記憶容量 (メモリ) が必要となることが欠点と言えます。逆に、記憶容量が十分にあれば安定したソーティングを行えるため、外部整列に向けたアルゴリズムと言えます。

(メモ用紙)