第3章　論理演算

3.1　ブール代数

ブール代数では、命題 (正しいか正しくないかはっきり表せるもの) に対して正しいか正しくないかということだけを問題とします[1]。命題が正しいとき真 (true) であるといい、正しくないとき偽 (false) であるといいます。特に、情報科学の分野では真と偽を 1 と 0 で表します。また、ある命題が与えられたとき命題自身を A や B などの文字を使って表しますが、これを命題変数といいます。例えば、「ブリは魚である」という命題を A とおくと、この命題は正しいので、

$$A = 1$$

と表すことができます。また、1 つ以上の命題に対してある演算 (論理演算) を定義することによって新しい命題を得ることができます。実際、n 個の命題を命題変数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ で表わすとき、ある論理演算を行う論理関数を F とおくと、新しい命題は

$$F(A_1, A_2, \cdots, A_n) = \begin{cases} 1, & 1 \text{ になる条件} \\ 0, & 0 \text{ になる条件} \end{cases}$$

のように 1 または 0 のどちらかに対応させる論理関数として定義することができます。そして、この様な論理関数は 3 つの基本的な論理演算である論理積 (AND)・論理和 (OR)・否定 (NOT) の組み合わせによって全て記述できることが知られています。

それでは、3 つの基本的な論理演算である論理積・論理和・否定について詳しく見ていきましょう。同時に、本テキストで使用する論理演算子[2]を挙げておきます。

[1] **2 値論理**とも呼ばれます。
[2] 論理演算子は論理関数を具体的な論理演算として記述するための記号です。

論理積　命題変数 A,B に対して論理積を表す論理関数を F' とすると、論理積は

$$F'(A,B) = \begin{cases} 1, & A=1 \text{ かつ } B=1 \\ 0, & \text{それ以外 } (A=0 \text{ または } B=0) \end{cases}$$

で定義され、論理積を表す論理演算子 $\cdot$ を用いて論理演算 $A \cdot B$ と記述します。

論理和　命題変数 A,B に対して論理和を表す論理関数を F'' とすると、論理和は

$$F''(A,B) = \begin{cases} 1, & A=1 \text{ または } B=1 \\ 0, & \text{それ以外 } (A=0 \text{ かつ } B=0) \end{cases}$$

で定義され、論理和を表す論理演算子 $+$ を用いて論理演算 $A+B$ と記述します。

否定　命題変数 A に対して否定を表す論理関数を F''' とすると、否定は

$$F'''(A) = \begin{cases} 1, & A=0 \\ 0, & A=1 \end{cases}$$

で定義され、否定を表す論理演算子 $\overline{}$ を用いて論理演算 $\overline{A}$ と記述します。

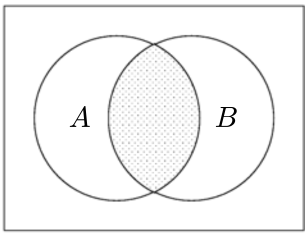
　また、**真理値表** (truth table)・**ベン図** (Venn's diagram)・**カルノー図** (Karnaugh map) など、論理関数 (論理演算) を図や表で視覚的に表現する方法もあります[3]。以下に、論理積・論理和・否定の真理値表およびベン図を挙げておきます (ベン図では 1 になる部分を塗りつぶす)。

論理積　$A \cdot B$

真理値表

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ベン図

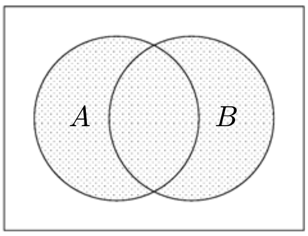


論理和　$A+B$

真理値表

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ベン図



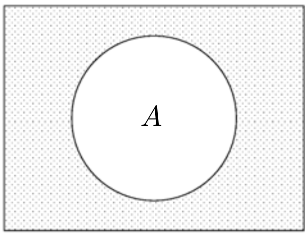
[3]論理関数 (論理演算) に含まれる各命題変数は 1 または 0 の何れかの値をとることから、とり得る全ての組み合わせについて演算結果をまとめ、図や表にして書き表します。

否定　$\overline{A}$

真理値表

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

ベン図



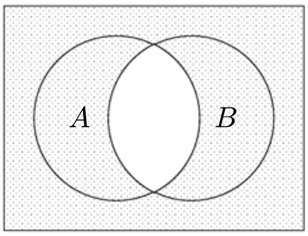
情報科学の分野では、論理積・論理和・否定の他に否定論理積 (NAND[4])・否定論理和 (NOR[5])・排他的論理和 (XOR[6], EOR[7]) の 3 つの論理演算をよく使用します。なお、新しく加えた 3 つの論理演算は以下のように定義されます。

否定論理積　$A \mid B = \overline{A \cdot B}$

真理値表

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ベン図

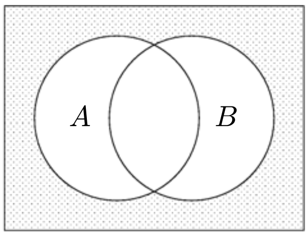


否定論理和　$A \downarrow B = \overline{A + B}$

真理値表

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ベン図

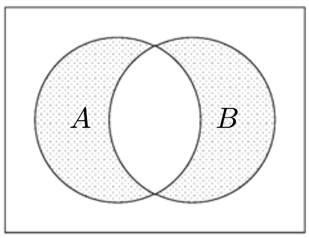


排他的論理和　$A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

真理値表

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ベン図



[4] NAND = Not AND.
[5] NOR = Not OR.
[6] XOR = eXclusive OR.
[7] EOR = Exclusive OR.

3.2　論理演算の基本公式

基本的な論理演算を理解したところで、論理演算に関する基本公式と証明方法について学習しましょう。最初に注意しなければならないことは、論理演算にも四則演算のように演算に優先順位があるということです。論理積・論理和・否定 (・否定論理積・否定論理和・排他的論理和) および括弧には図 3.1 ような演算の優先順位が決められています。

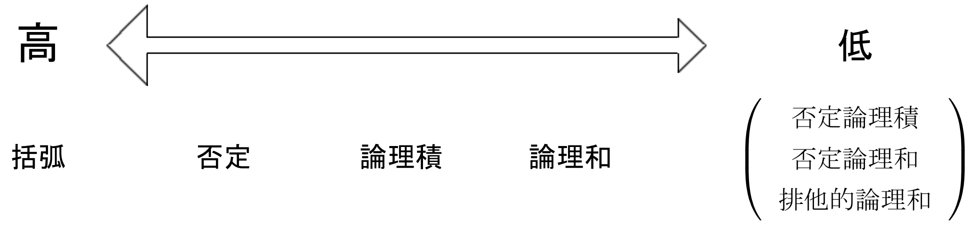


図 3.1: 演算の優先順位

論理演算に関する主な基本公式は表 3.1 のようなものがあります (ただし、A, B, C は命題変数)。証明は、命題変数が取り得る全ての組み合わせに対して等式が成り立つことを述べればよいので、真理値表やベン図を描くことによって証明することができます。

$0+0=0$	$0\cdot 0=0$	
$0+1=1$　(または $1+0=1$)	$0\cdot 1=0$　(または $1\cdot 0=0$)	
$1+1=1$　$(\neq 2)$	$1\cdot 1=1$	
$A+0=A$	$A\cdot 1=A$	
$A+1=1$	$A\cdot 0=0$	
$\overline{\overline{A}}=A$		2 重否定
$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$	交換律
$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$	結合律
$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	分配律
$A+A=A$	$A\cdot A=A$	べき等律
$A+A\cdot B=A$	$A\cdot(A+B)=A$	吸収律
$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$	ド・モルガンの定理
$A+\overline{A}=1$	$A\cdot\overline{A}=0$	
$A+\overline{A}\cdot B=A+B$	$A\cdot(\overline{A}+B)=A\cdot B$	
$A\cdot B+A\cdot\overline{B}=A$	$(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A$	

表 3.1: 論理演算の基本公式

【注意】否定論理積と否定論理和は結合律が成り立たない (排他的論理和は結合律が成り立つ) ことに注意し、演算の煩雑さを避けるために、否定論理積・否定論理和・排他的論理和を含む論理演算では、括弧によって演算順序を明示します。括弧のない場合は、図 3.1 に従った上で、左から順に演算を行います。また、否定論理積・否定論理和・排他的論理和を扱う場合は、先ず、論理積・論理和・否定に直してから演算を行ってください。

$$\begin{aligned} A \mid B \mid C \quad &\Longrightarrow \quad (A \mid B) \mid C \quad (\because (A \mid B) \mid C \neq A \mid (B \mid C)) \\ A \downarrow B \downarrow C \quad &\Longrightarrow \quad (A \downarrow B) \downarrow C \quad (\because (A \downarrow B) \downarrow C \neq A \downarrow (B \downarrow C)) \\ A \oplus B \oplus C \quad &\Longrightarrow \quad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \end{aligned}$$

例えば、ド・モルガンの定理と呼ばれる等式 $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ の証明は、表 3.2 のような真理値表を描くことで完了します。なお、慣れるまでは一度 $A+B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ を求めてから、$\overline{A+B}$ や $\overline{A} \cdot \overline{B}$ を求めると誤りが少なくなります。

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

表 3.2: 等式 $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ の証明

もちろん、表 3.1 に挙げた等式の証明が終われば、それらを使用しても良い (**数学科ノ学生デアレバ、証明ナク使用スルベカラズ**)。

例題 1 論理演算に関する等式 $A \cdot (A+B) = A$ を証明しなさい。

解答例 (証明)

A	B	$A+B$	$A \cdot (A+B)$	A
0	0	0	$0 \cdot 0 = 0$	0
0	1	1	$0 \cdot 1 = 0$	0
1	0	1	$1 \cdot 1 = 1$	1
1	1	1	$1 \cdot 1 = 1$	1

例題 2 論理演算に関する等式 $A \cdot \overline{A} = 0$ を証明しなさい。

解答例 (証明)

A	$\overline{A}$	$A \cdot \overline{A}$	0
0	1	$0 \cdot 1 = 0$	0
1	0	$1 \cdot 0 = 0$	0

問題 1 論理演算に関する等式 $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$ を証明しなさい。

問題 2 論理演算に関する等式 $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ を証明しなさい (分配律)。

問題 3 論理演算に関する等式 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ を証明しなさい (ド・モルガンの定理)。

問題 4 論理演算に関する等式 $(A + B) \cdot (\overline{A} + C) = \overline{A} \cdot B + A \cdot C$ を証明しなさい。

問題 5 論理演算に関する等式 $A \cdot B + B \cdot C + C \cdot \overline{A} = A \cdot B + C \cdot \overline{A}$ を証明しなさい。

問題 6 論理演算に関する等式 $(A+B) \cdot (B+C) \cdot (C+\overline{A}) = (A+B) \cdot (C+\overline{A})$ を証明しなさい。

問題 7 論理演算に関する等式 $\overline{A \cdot C + B \cdot \overline{C}} = \overline{A} \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C}$ を証明しなさい。

問題 8 論理演算に関する等式 $\overline{(A + C) \cdot (B + \overline{C})} = (\overline{A} + C) \cdot (\overline{B} + \overline{C})$ を証明しなさい。

問題 9 論理演算に関する等式 $A \oplus B = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$ を証明しなさい。

3.3 万能演算系

基本的な論理演算である論理積・論理和・否定は、全ての論理関数を構成することができるため**万能演算系**と呼ばれています。このことは、次章の論理回路と深い関係を持っているので、詳しく説明します。

最初に命題変数が1つの場合について考えみましょう。このとき、元の命題変数 A の値と新しい命題 $F(A)$ の値の組み合わせは4通りで、1変数の論理関数は表 3.3 の F_0,F_1,F_2,F_3 のいずれかになります。

A	0	1	$F_i(A)$ の論理演算
$F_0(A)$	0	0	0
$F_1(A)$	0	1	A
$F_2(A)$	1	0	$\overline{A}$
$F_3(A)$	1	1	1

表 3.3: 1変数の論理関数

F_1 と F_2 は A の関数となっており、論理関数 F は否定のみで表すことができます。また、F_0 と F_3 はそれぞれ0と1に固定されています。従って、1変数の論理演算は $0, 1, A, \overline{}$ で全て表すことができます。

次に命題変数が2つの場合について考えてみましょう。命題変数が1つの場合にならうと、元の命題変数 A,B の値と新しい命題 $F(A, B)$ の値の組み合わせは16通りになるので、2変数の論理関数は表 3.4 の F_0,F_1,$\cdots$,F_{15} のいずれかになります。従って、命題変数が2つの場合も、論理積・論理和・否定によって全ての関数を表すことができるので、2変数の論理演算は $0, 1, A, B, \overline{}, \cdot, +$ で全て表すことができます。

A	0	0	1	1	$F_i(A,B)$ の論理演算
B	0	1	0	1	
$F_0(A,B)$	0	0	0	0	0
$F_1(A,B)$	0	0	0	1	$A \cdot B$
$F_2(A,B)$	0	0	1	0	$A \cdot \overline{B}$
$F_3(A,B)$	0	0	1	1	A
$F_4(A,B)$	0	1	0	0	$\overline{A} \cdot B$
$F_5(A,B)$	0	1	0	1	B
$F_6(A,B)$	0	1	1	0	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$
$F_7(A,B)$	0	1	1	1	$A + B$
$F_8(A,B)$	1	0	0	0	$\overline{A + B} = A \downarrow B$
$F_9(A,B)$	1	0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$
$F_{10}(A,B)$	1	0	1	0	$\overline{B}$
$F_{11}(A,B)$	1	0	1	1	$A + \overline{B}$
$F_{12}(A,B)$	1	1	0	0	$\overline{A}$
$F_{13}(A,B)$	1	1	0	1	$\overline{A} + B$
$F_{14}(A,B)$	1	1	1	0	$\overline{A \cdot B} = A \mid B$
$F_{15}(A,B)$	1	1	1	1	1

表 3.4: 2 変数の論理関数

同様に、多変数の場合も 2 変数の場合に帰着することができるので、論理積・論理和・否定で全ての関数を表すことができることは明らかです (帰納法によって証明)。

上記で述べたように、論理積・論理和・否定で全ての論理演算を構成することができますが、特に、万能演算系の組が独立なものを**最小万能演算系**といい、論理積・否定の組や論理和・否定の組があります。論理和と否定の組が最小万能演算系であることを証明するには、論理積が論理和と否定で表せることと論理和と否定が独立であることを示せばよいことがわかります。前者については、ド・モルガンの定理を用いれば

$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

なので、論理積は論理和と否定で表せることが直ちにわかります。後者については、論理和と否定が独立でないと仮定して矛盾を示します。もし、独立でないなら否定は論理和で表せることになるので、1 変数の場合に全ての関数が論理和で表せることになり、表 3.3 の $F_2(A)$ に対応する論理演算を $A + A$, $A + 1$, $A + 0$ のいずれかで表すことができることになります。ところが、どれも否定を表すことができないので矛盾となり、論理和と否定が独立であることが示されます。

さて、このような最小万能演算系は全ての演算を構成することができますので、次章の論理回路を構成する上で最小万能演算系を実行する回路があれば必要かつ十分であるといえます。実際のコンピュータでは、1 つの演算で最小万能演算系となる否定論理積または否定論理和によって論理回路が構成されています。実際、否定・論理積・論理和・否定論理和・排他的論理和を否定論理積のみで表すと表 3.5 のようになり、最小万能演算系であることが証明されます。

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \overline{A\cdot A} = A \mid A \quad (\text{べき等律 } A = A\cdot A \text{ より}) \\
A\cdot B &= \overline{\overline{A\cdot B}} = \overline{A \mid B} = \overline{(A\mid B)\cdot(A\mid B)} = (A\mid B)\mid(A\mid B) \\
A+B &= \overline{\overline{A+B}} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}} = \overline{A}\mid\overline{B} = (A\mid A)\mid(B\mid B) \\
A\downarrow B &= \overline{A+B} = \{(A\mid A)\mid(B\mid B)\}\mid\{(A\mid A)\mid(B\mid B)\} \\
A\oplus B &= \overline{\overline{A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B}} = \overline{\overline{A\cdot\overline{B}}\cdot\overline{\overline{A}\cdot B}} = \overline{A\cdot\overline{B}}\mid\overline{\overline{A}\cdot B} \\
&= (A\mid\overline{B})\mid(\overline{A}\mid B) = \{A\mid(B\mid B)\}\mid\{(A\mid A)\mid B\}
\end{aligned}
$$

表 3.5: 否定論理積による基本的な論理演算の表現

問題 1　論理積と否定の組が最小万能演算系となることを証明しなさい。

問題 2　$\overline{A}$, $A\cdot B$, $A+B$, $A\mid B$, $A\oplus B$ を否定論理和 ($\downarrow$) のみで表しなさい。

問題 3　論理積と論理和の組は最小万能演算系となるか、考察しなさい。

問題 4　排他的論理和は最小万能演算系となるか、考察しなさい。