はじめに

今回のリカレントでは、Mathematica を使って Gröbner Bases を求めていく。1 部ではコンピュータと Gröbner Bases の関係について、2 部では Gröbner Bases の使い方について、3 部では大学入試問題を Gröbner Bases を使って解いた。さらに、4 部では図形問題につい書いた。

1　計算機と Gröbner Bases

1965 年に B.Buchberger は、W.Gröbner の指導のもと学位論文 Ein Algorithms zum Auffinden der Basiselemente (Innsbruck) を書きました。その中で多項式のイデアルのよい生成系—それを Gröbner Bases と名付けた—を作るアルゴリズムを提出しました。当初はこの様な計算は人間の力でやれるものではないため、あまり重要視されませんでした。しかし、近年コンピュータの計算速度の向上や記憶容量の増加によりさまざまな事が出来るようになり、Gröbner Bases も容易に求められるようになりました。そのため一躍脚光を浴びだしたというわけです。

このテキストでは、大学入試の問題を中心に例を挙げ Gröbner Bases を求めました。なお、このテキストの例は数秒で解が求まるものばかりです。

2　Gröbner Bases の使い方

2.1　連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

に対して、

$$\begin{array}{rcl} f_1 &=& a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n - b_1 \\ f_2 &=& a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n - b_2 \\ \vdots && \vdots \\ f_m &=& a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n - b_m \end{array}$$

とおき、この Gröbner Bases を求める。実際には、

```
f1 := a11 x1 + a12 x2 + ··· + a1n xn - b1;
f2 := a21 x1 + a22 x2 + ··· + a2n xn - b2;
⋮          ⋮          ⋮                ⋮
fm := am1 x1 + am2 x2 + ··· + amn xn - bm;
GroebnerBasis[{f1,f2,···,fm},{x1,x2,···,xn}]
```

と入力し、 $\boxed{\text{Shift}}+\boxed{\hookleftarrow}$ を押し実行します。

2.2 一変数多項式の最大公約多項式

元来 Gröbner Bases を求めるというのは、ユークリッドの互除法の多変数の多項式への拡張である。従って 1 変数の多項式 $\mathsf{f}_1(\mathsf{x}), \mathsf{f}_2(\mathsf{x}), \cdots, \mathsf{f}_m(\mathsf{x})$ に対して Gröbner Bases を求めれば、それが最大公約多項式となる。実際には、

```
f1 := f_1(x);
f2 := f_2(x);
⋮      ⋮
fm := f_m(x);
GroebnerBasis[{f1,f2,···,fm},{x}]
```

と入力し、 $\boxed{\text{Shift}}+\boxed{\hookleftarrow}$ を押し実行します。

2.3 媒介変数の関係式

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & g_1(t) \\ x_2 & = & g_2(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & g_n(t) \end{array}\right.$$

に対して、

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1 & = & x_1 - g_1(t) \\ f_2 & = & x_2 - g_2(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n & = & x_n - g_n(t) \end{array}\right.$$

とおき、この Gröbner Bases を求める。実際には、

```
f1 := x1 - g_1(t);
f2 := x2 - g_2(t);
⋮         ⋮
fn := xn - g_n(t);
GroebnerBasis[{f1,f2,···,fn},{t,x1,x2,···,xn}]
```

と入力し、 $\boxed{\text{Shift}}+\boxed{\hookleftarrow}$ を押し実行します。

2.4 Gröbner Basesを求める上での注意

- **注意：** 連立方程式が解を持たない場合は、

```
{1}
```

と出力されます。

□ **例**
入力：

```
f1:= x + 2 y + 3 z - 4;
f2:= x + 3 y + 6 z - 10;
f3:= x + 4 y + 9 z - 14;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3},{z,y,x}]
```

出力：

```
{1}
```

- **注意：** Mathematicaでは変数 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ に、$X_1 > X_2 > \cdots > X_n$ という順序を入れたことになります。順序を指定すればGröbner Basesは一意的に決まることがわかっていますが、順序を変えると別のGröbner Basesが出てきますので、順番はおろそかにできません。次の2つの例においては、**例** 1の場合aの値を求めることができますが、**例** 2では求めることができません。ところが、Maple[1] というMathematicaと同じような数式処理ソフトを使うと、Gröbner Basesはplex[2] とtdeg[3] のモードを持っておりtdegモードでは順序を気にしないで求めることができます。また、plexモードはMathematicaのGröbner Basesと同じ働きをします。

□ **例** 1
入力：

```
f1:= x + y + z;
f2:= x^3 + y^3 + z^3 + 17;
f3:= x^4 + y^4 + z^4 - 2;
f4:= x y + y z + z x - a;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4},{z,y,x,a}]
```

出力：

```
          2                       3         2             2
{-1 + a , 17 + 3 a x + 3 x , a + x  + x y + y , x + y + z}
```

従って、$a = \pm 1$ となる。

[1] Waterloo Maple Software 社
[2] 辞書式順序
[3] 総次数

□ **例** 2
入力：

```
f1:= x + y + z;
f2:= x^3 + y^3 + z^3 + 17;
f3:= x^4 + y^4 + z^4 - 2;
f4:= x y + y z + z x - a;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4},{a,z,y,x}]
```

出力：

```
          2        3      6                     4                2
{289 - 9 x  + 102 x  + 9 x , -(x (3 - 34 x - 3 x  - 17 y)) + 17 y ,

                                      4
  x + y + z, 17 a - x (-3 + 17 x + 3 x )}
```

3　Gröbner Bases を使って大学入試問題を解く

問題1　$y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}=1$ のとき、xyz の値を求めよ。

解答
$xyz=a$ として、
入力：

```
f1:= y z + 1 - z;
f2:= z x + 1 - x;
f3:= x y z - a;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3},{a,z,y,x}]
```

出力：

```
{1 - y + x y, 1 - x + x z, 1 - z + y z, 1 + a}
```

よって、$a=-1$ となる。

問題2　$x+y+z=a, xy+yz+zx=b, xyz=b$ とおくとき、$x^3+y^3+z^3$ を a, b, c を用いて表わせ。

解答
$x^3+y^3+z^3=d$ として、
入力：

```
f1:= x + y + z - a;
f2:= x y + y z + z x - b;
f3:= x y z - c;
f4:= x^3 + y^3 + z^3 - d;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4},{x,y,z,d}]
```

出力：

```
   3                                  2    3             2                2
{-a  + 3 a b - 3 c + d, -c + b z - a z  + z , b - a y + y  - a z + y z + z ,

  -a + x + y + z}
```

よって、$d = a^3 - 3ab + 3c$ となる。

問題３　x, y, z が次の連立方程式をみたしているとき、以下の問に答えよ。

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= -17 \\ x^4 + y^4 + z^4 &= 2 \end{cases}$$

(1)　xyz の値を求めよ。
(2)　$xy + yz + zx$ の値を求めよ。
(3)　$x^5 + y^5 + z^5$ の値を求めよ。

解答 (1)
$xyz = a$ として、
入力：

```
f1:= x + y + z;
f2:= x^3 + y^3 + z^3 + 17;
f3:= x^4 + y^4 + z^4 - 2;
f4:= x y z - a;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4},{z,y,x,a}]
```

出力：

```
                    2        3      6                     4                2
{17 + 3 a, 289 - 9 x  + 102 x  + 9 x , -(x (3 - 34 x - 3 x  - 17 y)) + 17 y ,

  x + y + z}
```

よって、$a = -\dfrac{17}{3}$ となる。
解答 (2)
$xy + yz + zx = b$ として、
入力：

```
f1:= x + y + z;
f2:= x^3 + y^3 + z^3 + 17;
f3:= x^4 + y^4 + z^4 - 2;
f4:= x y + y z + z x - b;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4},{z,y,x,b}]
```

出力：

```
        2                     3       2           2
{-1 + b , 17 + 3 b x + 3 x , b + x  + x y + y , x + y + z}
```

よって、$\mathrm{b} = \pm 1$となる。

解答 (3)

$\mathrm{x}^5 + \mathrm{y}^5 + \mathrm{z}^5 = \mathrm{c}$として、

入力：

```
f1:= x + y + z;
f2:= x^3 + y^3 + z^3 + 17;
f3:= x^4 + y^4 + z^4 - 2;
f4:= x^5 + y^5 + z^5 - c;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4},{z,y,x,c}]
```

出力：

```
             2                       3            2                 2
{-7225 + 9 c , 1445 + 9 c x + 255 x , 3 c + 85 x  + 85 x y + 85 y , x + y + z}
```

よって、$\mathrm{c} = \pm\frac{85}{3}$となる。

問題４　１の虚数立方根を x, y としたとき、次の値を求めよ。

(1)　$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$

(2)　$\mathrm{x}^{13} + \mathrm{y}^7$

解答 (1)

$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} = \mathrm{a}$として、

入力：

```
f1:= x + y + 1;
f2:= x^3 - 1;
f3:= y^3 - 1;
f4:= x^2 + y^2 - a x y
GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4},{a,x,y}]
```

出力：

```
           2
{1 + y + y , 1 + x + y, 1 + a}
```

よって、$\mathrm{a} = -1$となる。

解答 (2)
$x^{13} + y^7 = b$ として、
入力：

```
f1:= x + y + 1;
f2:= x^3 - 1;
f3:= y^3 - 1;
f4:= x^13 + y^7 - b
GroebnerBasis[{f1,f2,f3,f4},{b,x,y}]
```

出力：

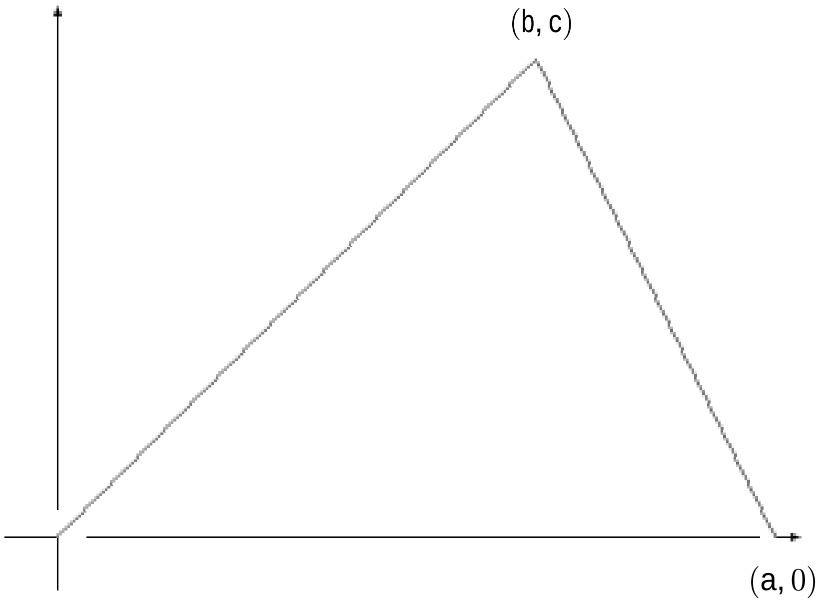
```
            2
{1 + y + y , 1 + x + y, 1 + b}
```

よって、$b = -1$ となる。

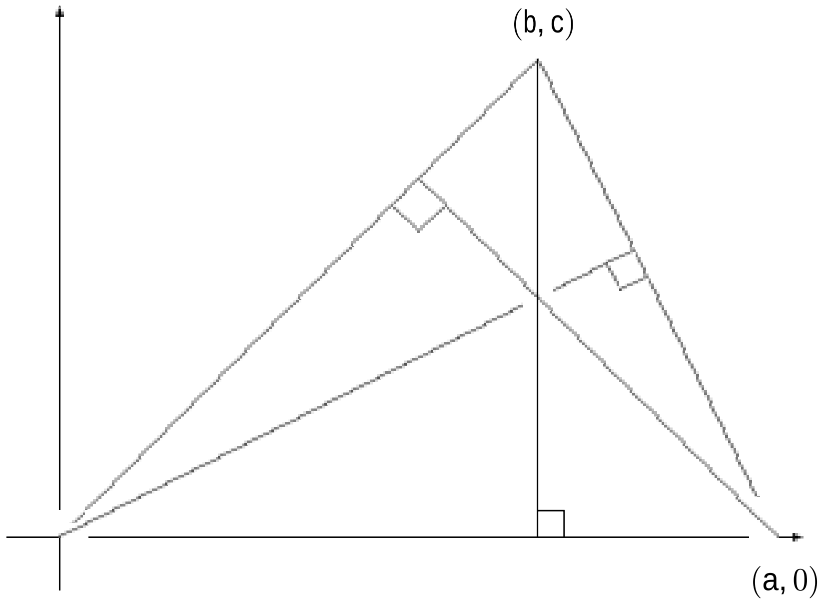
4 Gröbner Bases を使って図形問題を解く

4.1 3角形の垂心・外心・重心を求める

デカルト座標上に下図のような 3 頂点を持つ 3 角形を考えます。



4.1.1 垂心を求める



図より 3 直線は、

$$\begin{cases} (b-a)x + cy = 0 \\ (x-a)b + cy = 0 \\ x - b = 0 \end{cases}$$

となる。

入力：

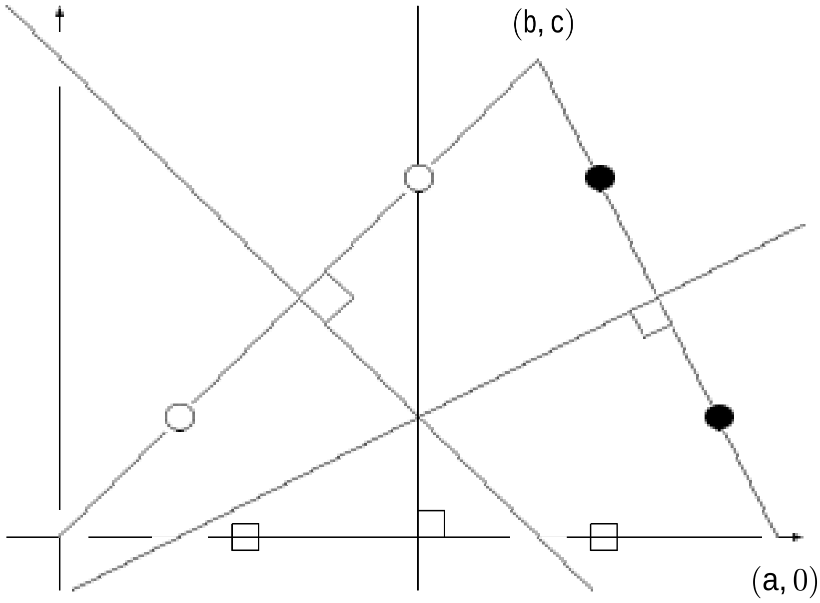
```
f1:= (b - a) x + c y;
f2:= (x - a) b + c y;
f3:= x - b;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3},{y,x}]
```

出力：

```
{-b + x, -((a - b) b) + c y}
```

よって、$(x, y) = \left(b, \frac{(a-b)b}{c}\right)$ となる。特に、解ありとなるから垂心の存在も示している。

4.1.2　外心を求める



図より 3 直線は、

$$\begin{cases} 2bx + 2cy - b^2 - c^2 = 0 \\ 2x - a = 0 \\ -2(a-b)x + 2cy + a^2 - b^2 - c^2 = 0 \end{cases}$$

となる。

入力：

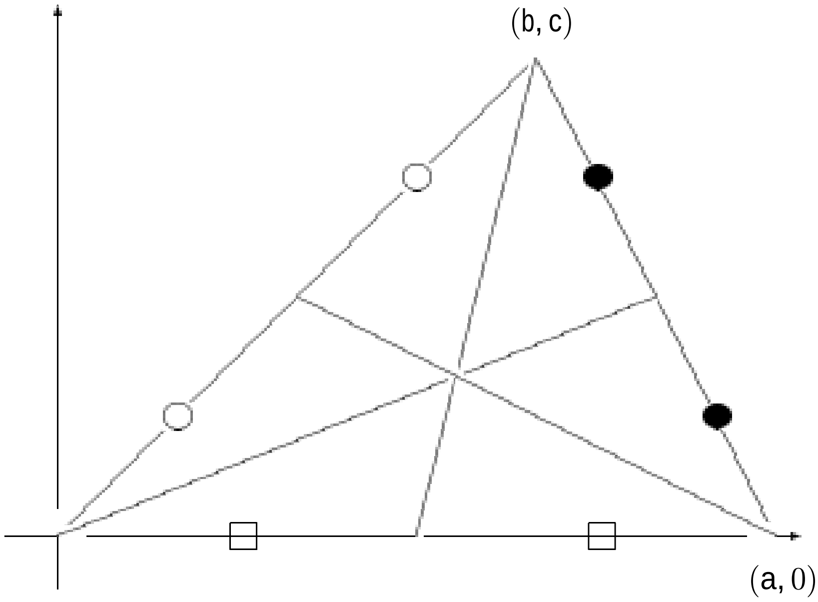
```
f1:= 2 b x + 2 c y + - b^2 - c^2;
f2:= 2 x - a;
f3:= -2 (a - b) x + 2 c y + a^2 - b^2 - c^2;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3},{y,x}]
```

出力：

```
                         2     2
{-a + 2 x, a b - b   - c   + 2 c y}
```

よって、$(x, y) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b^2 + b^2 - ab}{2c}\right)$ となる。

4.1.3 重心を求める



図より 3 直線は、

$$\begin{cases} -\mathsf{c}\mathsf{x} + (\mathsf{a}+\mathsf{b})\mathsf{y} = 0 \\ -\mathsf{c}(\mathsf{x}-\mathsf{a}) + (\mathsf{b}-2\mathsf{a})\mathsf{y} = 0 \\ -\mathsf{c}(2\mathsf{x}-\mathsf{a}) + (2\mathsf{b}-\mathsf{a})\mathsf{y} = 0 \end{cases}$$

となる。

入力：

```
f1:= -c x + (a + b) y;
f2:= -c (x - a) + (b - 2a) y;
f3:= -c (2x -a) + (2b - a) y;
GroebnerBasis[{f1,f2,f3},{y,x}]
```

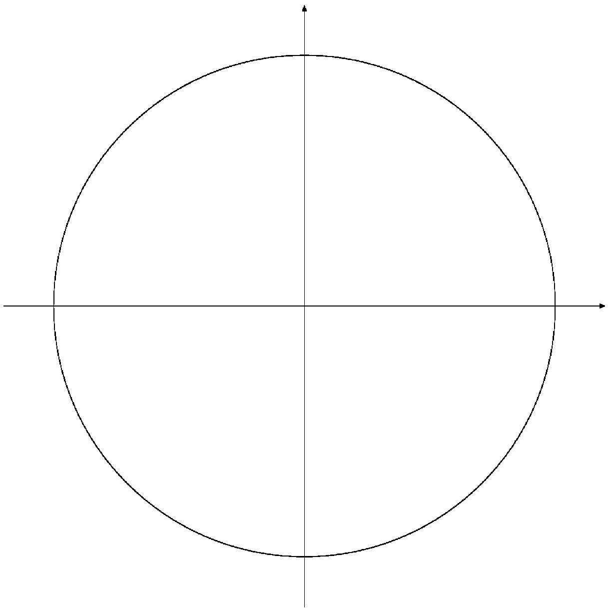
出力：

```
{-(a (a + b) c) + 3 a c x, -(c (-a + 3 x)) + 3 b y, -(a c) + 3 a y}
```

よって、$(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \left(\frac{\mathsf{a}+\mathsf{b}}{3}, \frac{\mathsf{c}}{3}\right)$となる。

4.2　媒介変数を使った図形問題を解く

4.2.1　円



$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{t^2}{1+t^2}} \\[2ex] y = \sqrt{\dfrac{t}{1+t^2}} \end{cases}$$

について Gröbner Bases を求める。

入力：

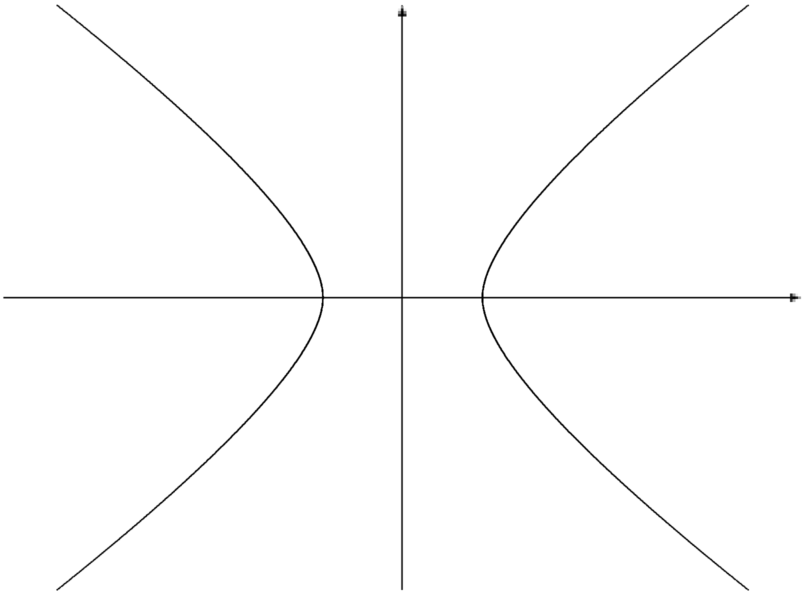
```
f1:= x - Sqrt[t^2/(1 + t^2)];
f2:= y - Sqrt[1/(1 + t^2)];
GroebnerBasis[{f1,f2},{t,y,x}]
```

出力：

```
       2    2    2    2    2  2          1        2
{-1 + x  + y , -t  + x  + t  x , -1 + ------ + x }
                                           2
                                      1 + t
```

よって、$x^2 + y^2 = 1$ となり円の方程式が導かれる。

4.2.2 双曲線



$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

について Gröbner Bases を求める。

入力：

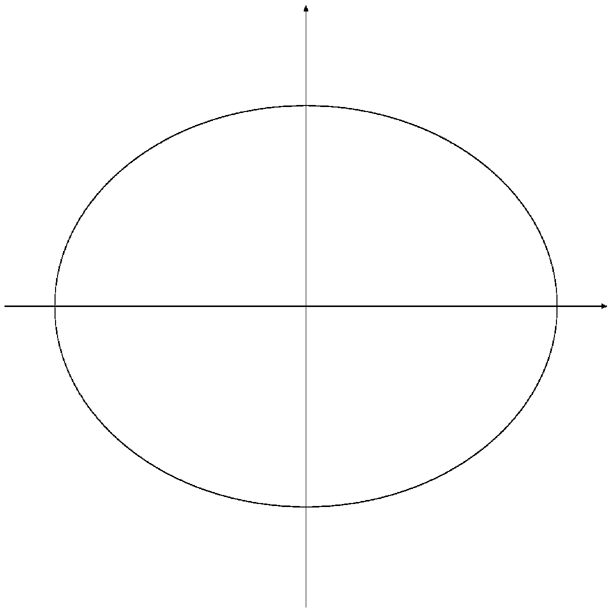
```
a:=1/Sqrt[2];
f1:= a x + a y -t;
f2:= a x - a y -1/t;
GroebnerBasis[{f1,f2},{t,y,x}]
```

出力：

```
      2    2                           2
{2 - x  + y , 2 t - Sqrt[2] (x + y),  - - Sqrt[2] (x - y)}
                                       t
```

よって、$x^2 - y^2 = 2$ となり双曲線の方程式が導かれる。

4.2.3　楕円



$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{9t^2}{1+t^2}} \\ y = \sqrt{\dfrac{4}{1+t^2}} \end{cases}$$

について Gröbner Bases を求める。

入力：

```
f1:= x - Sqrt[9 t^2/(1 + t^2)];
f2:= y - Sqrt[4/(1 + t^2)];
GroebnerBasis[{f1,f2},{t,y,x}]
```

出力：

```
          2      2      2    2    2  2         9       2
{-36 + 4 x  + 9 y , -9 t  + x  + t  x , -9 + ------ + x }
                                                  2
                                             1 + t
```

よって、$4x^2 + 9y^2 = 36$ となり楕円の方程式が導かれる。