計算機理論入門 課題と解答例(その1)

【課題1】 テキスト(p.3)で紹介した10進数の小数部から2進数の小数部への変換方法について、10進数0.6875を例に挙げ、正しく変換されていることを示しなさい。

[ヒント] $0.6875 \times 2 = 1.375$ より $0.6875 = 1.375 \times 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} + 0.375 \times 2^{-1}$

(解答例) ヒントに習って式変形を施すことで、関係式

$$\begin{cases} 0.375 \times 2 = 0.75 & \text{より} \quad 0.375 = 0.75 \times 2^{-1} = 0 \times 2^{-1} + 0.75 \times 2^{-1} \\ 0.75 \times 2 = 1.5 & \text{より} \quad 0.75 = 1.5 \times 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} + 0.5 \times 2^{-1} \\ 0.5 \times 2 = 1.0 & \text{より} \quad 0.5 = 1.0 \times 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} \end{cases}$$

を得る。さらに、上記の関係式を順次代入することで、

$$\begin{aligned} 0.6875 &= 1 \times 2^{-1} + \underline{0.375} \times 2^{-1} \\ &= 1 \times 2^{-1} + (0 \times 2^{-1} + 0.75 \times 2^{-1}) \times 2^{-1} \\ &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + \underline{0.75} \times 2^{-2} \\ &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + (1 \times 2^{-1} + 0.5 \times 2^{-1}) \times 2^{-2} \\ &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + \underline{0.5} \times 2^{-3} \\ &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + (1 \times 2^{-1}) \times 2^{-3} \\ &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\ &= (2\text{進数})\ 0.1011 \end{aligned}$$

が得られ、正しく変形されていることがわかる。

【課題2】 $\langle +, \cdot \rangle$ は万能演算系になりうるか?考察しなさい。

[ヒント] $\langle +, \cdot \rangle$ は万能演算系にならない。

(考察例) $\langle +, \cdot, \overline{} \rangle$ は万能演算系であるから、$\langle +, \cdot \rangle$ が万能演算系となるためには、論理和(+)と論理積(・)で否定($\overline{}$)を表すことができればよい。すなわち、1変数のとき、否定を表す論理式($F_2(A)$)を作ることができれば万能演算系となる。ところが、1変数の場合に+と・によって得られる(基本となる)論理式は、以下の12通りである。

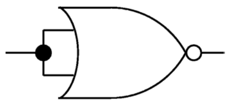
$$\begin{array}{ccc} A + A = A & A + 1 = 1 & A + 0 = A \\ 1 + 1 = 1 & 1 + 0 = 1 & 0 + 0 = 0 \\ A \cdot A = A & A \cdot 1 = A & A \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 0 = 0 & 0 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

従って、上記の論理演算をいくら繰り返しても否定を表す論理演算を作ることができない。

計算機理論入門 課題と解答例(その2)

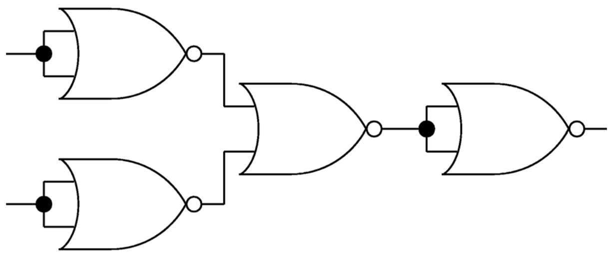
【課題 3】 NOR 回路のみを使って、NAND 回路と XOR 回路を作成しなさい。

[ヒント] 否定 ($\overline{}$) を否定和 ($\downarrow$) のみで表すと、$\overline{A} = \overline{A+A} = A \downarrow A$ であるから、NOT 回路は以下のように構成すればよい。なお、論理演算式の中で否定 ($\overline{A}$) を $A \downarrow A$ で表すと見にくくなるので、そのままにしておくこと。



(解答例)

NAND 回路 $\quad A \mid B = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} = \overline{\overline{\overline{A} + \overline{B}}} = \overline{\overline{A} \downarrow \overline{B}}$



XOR 回路 $\quad A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = \overline{\overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B}} = \overline{(A \cdot \overline{B}) \downarrow (\overline{A} \cdot B)}$

$$= \overline{\overline{\overline{A \cdot \overline{B}}} \downarrow \overline{\overline{\overline{A} \cdot B}}} = \overline{\overline{\overline{A} + B} \downarrow \overline{A + \overline{B}}} = \overline{(\overline{A} \downarrow B) \downarrow (A \downarrow \overline{B})}$$